

Riga-Austausch 2010 Tagebuch



1. Tag, Montag 15.3.10:

Nach einer Kennenlern- und Lektürephase wurden wir heute durch die Tatsache verwirrt, dass man auf einer gekrümmten Fläche zwischen Kurven, die "immer geradeaus" laufen, und Kurven, die "um die Kurve laufen" unterscheiden kann. Führt man z.B. auf der streng kugelförmig gedachten Erdoberfläche mit dem Fahrrad immer geradeaus, kommt man irgendwann mal an den Startpunkt zurück. Man ist, ohne es zu wollen, im Kreis gefahren, allerdings auf einem größt möglichen Kreis. Bei jedem kleineren Kreis hätte man dagegen stets nach innen lenken müssen.

Am besten, man veranschaulicht sich dies auf dem Papiermodell eines Fußballs, der annähernd rund ist und sich leicht aus einem Gitter herstellen lässt, das aus regelmäßigen Sechsecken besteht. Dazu muss man zunächst in dem Gitter in regelmäßigen Abständen Sechsecke herausschneiden, so dass sich immer sechs Sechsecke um ein Loch gruppieren. Nun schneidet man diesen Ring auf und zieht ihn so zusammen, dass immer 5 Sechsecke um ein fünfeckiges Loch herumliegen. Die vormals ebene Fläche wölbt sich kugelförmig. Führt man fort, ergibt es dann den Fußball bestehend aus 20 Sechsecken und 12 Fünfecken. Die Löcher schließt man geschickt, wenn man noch einen Luftballon hineinpustet.



Doch was passiert, wenn man statt der fünfeckigen Löcher regelmäßige Siebenecke einsetzt und ein siebentes Sechseck ergänzt? Dann krümmt sich die Fläche in dem Bestreben, dem Platzmangel auszuweichen. Dabei entsteht eine sattelförmige Fläche. Dabei erkennt man zwei Bögen, von denen einer sich nach unten und einer nach oben wölbt. Diese Art Krümmung findet sich z.B. an der Innenseite einer Banane. Diese ist hingegen außen wie eine Kugel oder ein Apfel gekrümmt. Führt man aber nun mit der Papierkonstruktion fort wie beim Fußball, so erhält man eine Fläche von überall gleicher Bauweise, die sich jedoch nicht schließt, sondern von innen nach außen mangels Platz immer wilder einkräuselt. Und das sah nach einiger Zeit so aus:



und wurde immer wilder. Dies ist eine sogenannte hyperbolische Fläche. Damit sind wir auch beim Thema, und es ist an der Zeit, zum Häkeln überzugehen. Während nämlich das Papiermodell bald an die Grenzen seiner Belastbarkeit kommt, kann man beim Häkeln noch weiter machen. Und es gibt Möglichkeiten, das Tempo der Kräuselung zu steuern. Dazu steigert man die Zahl der Maschen von Kreis zu Kreis nach außen überproportional, indem man z.B. jede dritte Masche doppelt häkelt. Häkelt man nur jede vierte Masche doppelt, fällt das Wachstum entsprechend geringer aus. Streng genommen muss man sich an das Wachstumsgesetz für hyperbolische Kreise halten.



2. Tag, Dienstag 16.3.10:

Die deutschen Schülerinnen holen beim Häkeln mächtig auf und haben viel Spaß dabei. Die hyperbolischen Flächen wachsen in allen Farbestellungen heran. Immer wieder kommen Klassen herein, um diesem Treiben staunend zuzuschauen. Während Handarbeiten und Werken am Agenskalns-Gymnasium normale Unterrichtsfächer sind, kennt solche Fächer schon lange kein Schüler mehr an nordrhein-westfälischen Gymnasien. Obwohl wir doch alle wissen, dass man mit Kopf, Herz und Hand lernt, dass räumliches Vorstellungsvermögen ein weitverbreiteter Defizitbereich ist und dass das Handwerk immer noch einen goldenen Boden hat.

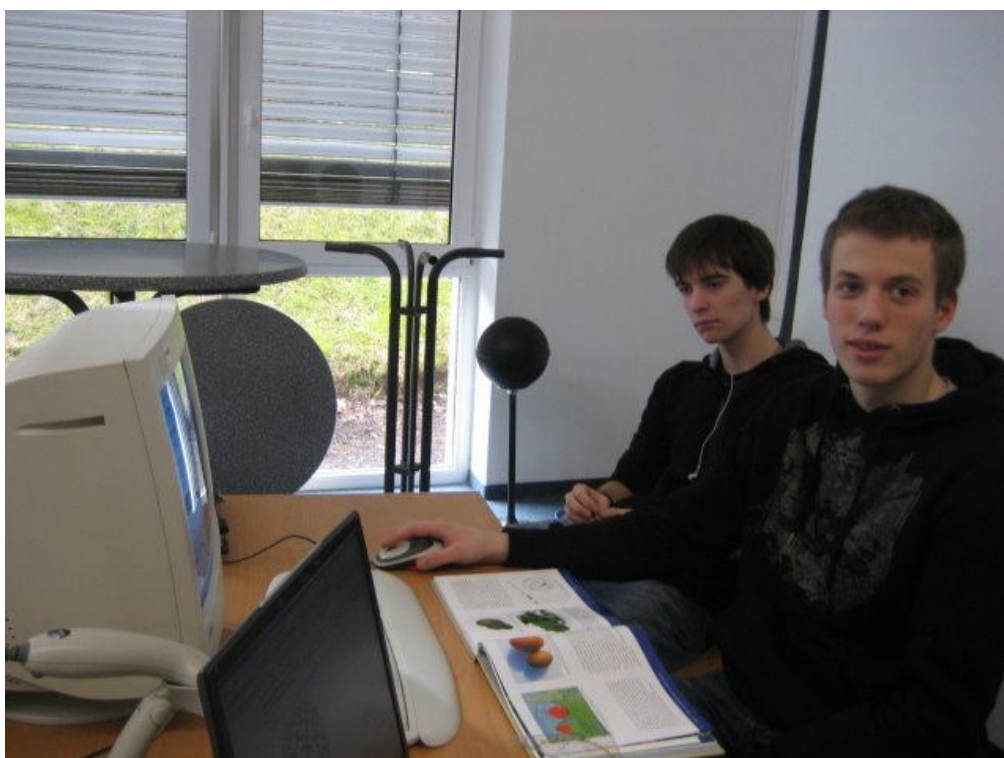


Doch was soll man mit einem Topflappen, der keiner ist, sondern eher an einen krausen Salatkopf erinnert? Nun musste erst einmal der mathematische Hintergrund geklärt werden, nicht ohne auf eine gute Quelle hinzuweisen. Die Autorin ist Daina Taimina, Erfinderin dieser Darstellungsform hyperbolischer Geometrie und Inspiratorin einer weltumspannenden Häkelmanie. Ihr Buch "Crocheting Adventures" ist auch für weniger handarbeitsbegeisterte Zeitgenossen empfehlenswert.





Wir untersuchen zunächst unsere Erdkugel als Beispiel für eine positiv gekrümmte Fläche. Auch hier ist die Geometrie nicht, wie wir es von der Schule gewohnt sind. Geht man immer geradeaus, so landet man nach 40.000 km wieder am Startpunkt, vorausgesetzt, man hat die Fähigkeit, durch Berge und über Wasser zu laufen. "Geradeaus" ist nicht tatsächlich "gerade", sondern die sogenannten geodätischen Linien ("Geradeauslinien", kürzeste Verbindungslinien zwischen zwei Punkten) sind Abschnitte von Großkreisen, wie sie uns als Längengrade oder Meridiane auf der Erde bekannt sind. Die Wege zweier Leute, die von verschiedenen Punkten startend immer geradeaus gehen, müssen sich zwangsläufig kreuzen - es gibt keine parallelen Geodäten. Und die Winkelsumme in einem sphärischen Dreieck beträgt immer über 180° ; je größer die Dreiecksfläche, umso mehr. Das mussten wir doch einmal am Globus und noch genauer mit Google-Earth ausprobieren.



Wer jetzt denkt, aha, die Jungs - 3 gibt es unter den 28 Teilnehmern - sitzen mal wieder nur am Computer, wird hier eines Besseren belehrt:



In der hyperbolischen Geometrie ist vieles genau andersherum. Man kann von verschiedenen Punkten aus in verschiedene Richtungen geradeaus laufen, ohne dass sich die Wege schneiden müssen. In der gewöhnlichen Ebene ist es hingegen so, dass beide Läufer parallel, also in (entgegengesetzt) gleicher Richtung unterwegs sein müssen. Ändert einer auch nur minimal die Richtung, so schneiden sich die Geraden. Da gibt es in der hyperbolischen Welt viel mehr Platz, Platz für viele verrückte Dinge. Zunächst aber wundert man sich vielleicht nicht mehr so sehr, dass die Winkelsumme in einem Dreieck hier stets unter 180° liegt. Auf dem Papiermodell konnten wir das noch nicht so gut sehen. Allerdings fanden wir parallele, will heißen sich nicht schneidende Geodäten, die von einer dritten Geodäten unter verschiedenen Winkeln gekreuzt wurden. Ein klarer Verstoß gegen den Stufenwinkelsatz! Man kann die Dreiecke in der hyperbolischen Ebene sogar so groß und schlank gestalten, dass sich fast die Winkelsumme 0° erreichen lässt. Dies kann man auf den Häkelobjekten, wenn sie groß genug sind, gut veranschaulichen. Aber das haben wir am Donnerstag vor.

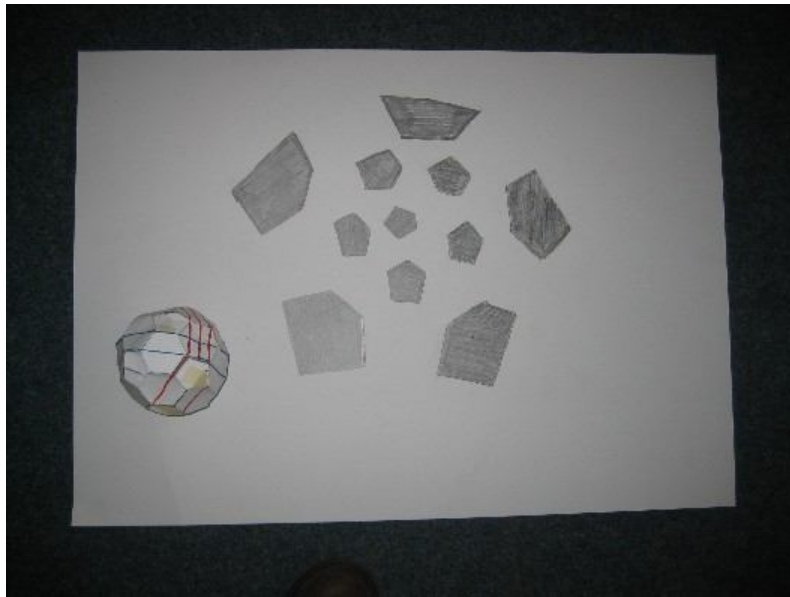
3. Tag, Mittwoch 17.3.10:

Heute pausiert das Projekt, ein längerer Ausflug nach Lemgo mit Zwischenstation am Gemeinschaftskraftwerk Vlotho steht auf dem Programm.

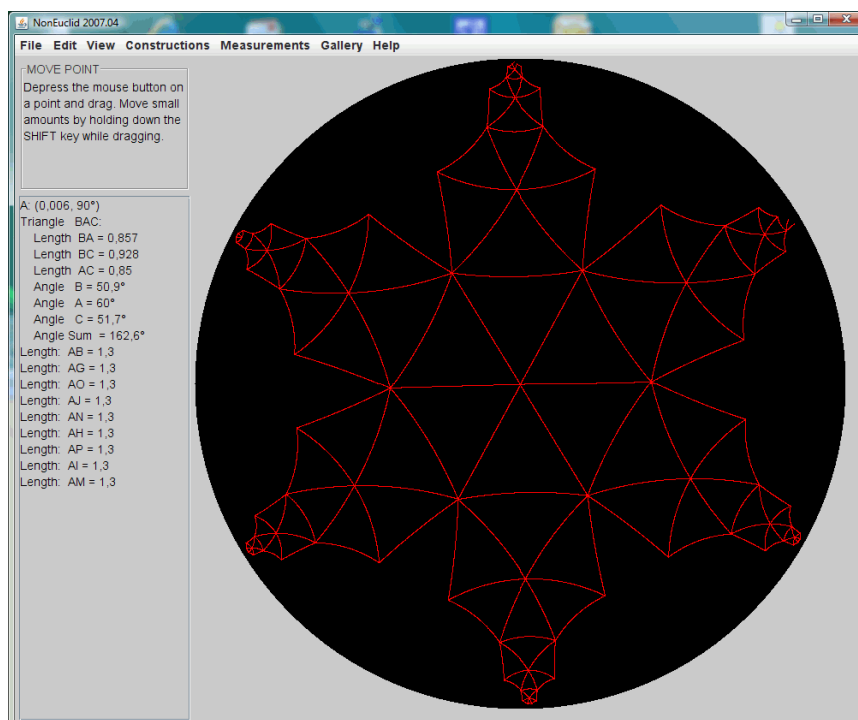
4. Tag, Donnerstag 18.3.10:

Kugeln und Häkelobjekte lassen sich gut in die Hand nehmen. Aber trotzdem will man z.B. nicht immer einen Globus mit sich herumschleppen, sondern vertraut auf eine Landkarte. Wenn man nun einen großen Teil der Erde abbilden möchte, tritt ein Problem deutlich sichtbar zutage: Man kann eine gekrümmte Fläche prinzipiell nicht in eine flache Ebene abbilden, ohne dass es zu Verzerrungen kommt. Grönland ist beileibe nicht so riesig, wie es auf den Weltkarten immer erscheint. Wir wollten das einmal verdeutlichen, indem wir eine Landkarte von einem Fußball erstellten. Der Trick: unsere am Montag gebauten Fußbälle hatten fünfeckige Löcher; da konnte man mit einer Lampe, die sozusagen am Nordpol abgebracht wurde, hindurchleuchten. Dadurch wurden die Fünfecke stereographisch auf den Tisch

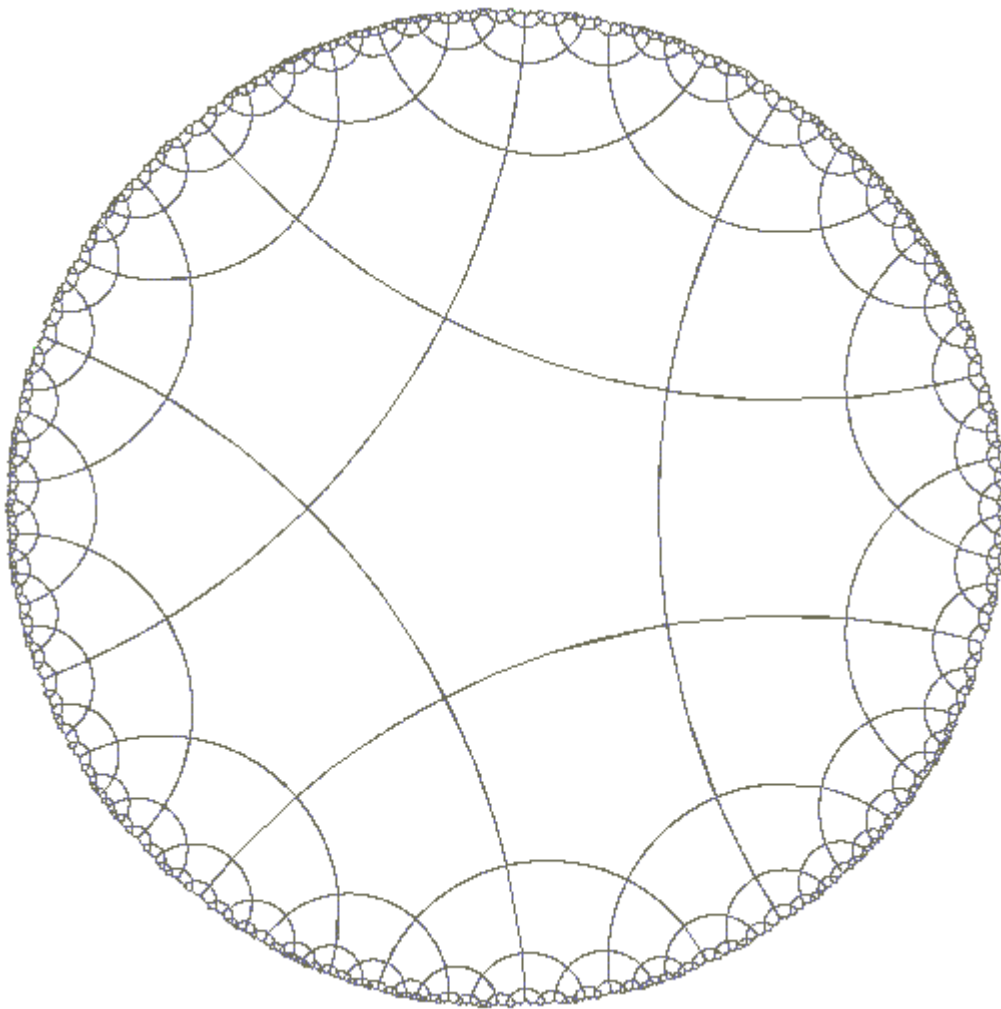
projiziert. Man sieht, wie Längen und Flächen nach außen hin beträchtlich wachsen, die Winkel bleiben aber unverändert. Nur zur Orientierung: der Südpol ist auf dieser Karte im Zentrum, der Nordpol verschwindet nach außen im Unendlichen. Das Fünfeck, das den Nordpol umgibt, ist auch zu weit außen, um ins Bild zu kommen. Es würde wie ein fünfeckiger Rahmen erscheinen.



Mit dem Programm *NonEuclid* ([hier geht es zu download mit guter theoretischer Erklärung](#)) haben wir eine ähnliche Möglichkeit, eine hyperbolische Ebene zu kartographieren. Dabei wird die ganze unbegrenzte hyperbolische Ebene in eine Kreisscheibe abgebildet. Das geht nur dadurch, dass Längen und Flächen nach außen hin immer kleiner erscheinen und zum Rand hin fast verschwinden. Auch hier bleiben die Winkel wieder unverfälscht. Die Geodäten ("Geradeauslinien") werden in diesem Modell durch Kreisbögen wiedergegeben, die an beiden Enden senkrecht auf den Kreisrand münden. Man kann diesen unendlich langen Weg zum Rand also in Wahrheit garnicht laufen. Zieht man z.B. die Ecken eines Drei- oder Viereck zum Rand hin, so werden die Winkel immer kleiner. Die Winkelsumme kann daher von nahezu 180° (bzw. 360°) alle Werte bis zu 0° -Grenze durchlaufen.

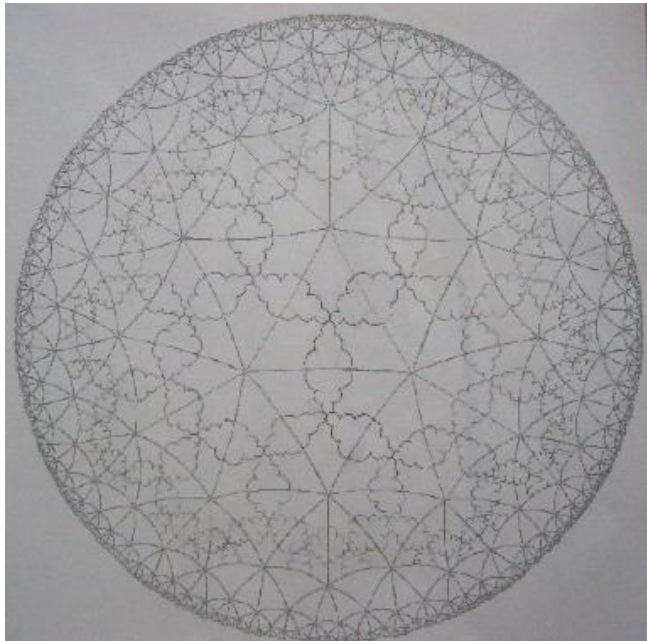


Das hat eine wunderbare Konsequenz: Während man eine flache Ebene nur mit Parallelogrammen auslegen kann, von denen 4 in einer Ecke zusammenstoßen (Winkelsumme 360°), kann man die hyperbolische Ebene z.B. mit regelmäßigen Fünfecken parkettieren. Die Winkel in den Ecken, die normalerweise $3 \cdot 180^\circ : 5 = 108^\circ$ betragen, können dazu einfach auf 90° herabgesetzt werden. Dann passen 4 Fünfecke an eine Ecke. Durch Spiegeln kann man die Fünfecke immer weiterbewegen, so dass sich die Ebene oder - im Modell - die Kreisscheibe immer weiter von innen nach außen füllt. Da die Anzahl der Flächen dabei nach außen hin ebenso drastisch zunimmt wie ihre Fläche schrumpft, ist das ein mühsames Unterfangen, das auch das Programm schnell an den Rand der Funktionsfähigkeit bringen kann.



Zu Glück gibt es ein anderes Programm *Hyperbolic Tesselations*, mit dem sich solche Parkettierungen wie obenstehend auf Knopfdruck erstellen lassen ([hier geht es zum download](#)). Wie die meisten Sachen zu diesem Thema im Internet, ist es auf Englisch. Aber das ist für einen internationalen Schüleraustausch kein Problem. Überhaupt ist es wenig sinnvoll, mathematische Fachbegriffe in der Sprache des Partnerlandes zu lernen. Hier ist die gemeinsame Verständigung auf Englisch der professionellste Weg. Das Programm erlaubt es, die regelmäßige Ausgangsfigur, z.B. ein Fünfeck, und die Zahl der Fünfecke in einer Ecke zu wählen. Im vorliegenden Fall kann diese Zahl beliebig von 4 beginnend gesteigert werden. Wir haben uns eine Reihe von Beispielen ausgedruckt und sie auf künstlerische Weise nach dem Vorbild der

berühmten Bilder von M. C. Escher (* [17. Juni 1898](#); † [27. März 1972](#)). Der arme konnte noch nicht auf die Hilfe eines Computers zurückgreifen und führte zudem seine aufwendigen Motive in Holzschnittechnik aus. Hier noch ein original Escher-Plagiat:



5. Tag, Freitag 19.3.10:

Es beginnt der Tag der Wahrheit oder der Präsentation. Wir planen eine Mischung aus Stationen, an denen die Besucher die Ergebnisse aus der Nähe sehen und auch berühren können, sowie einem Power-Point-Vortrag (hier geht es zu einer flash-Version), den möglichst viele Schülerinnen und Schüler gemeinsam halten sollen. Er ist teils von den Betreuern und teils von den Schülern erstellt worden. Alle anderen wirken an den Stationen mit, zeigen ihre Häkel- und Malkünste und beantworten Fragen zum Sinn und Zweck der ganzen Aktion. Dafür mussten wir noch Einges über die Biologie der Korallenriffe herausfinden, denn die gehäkelten Krausen erinnern nicht nur an Korallen, sondern sind tatsächlich ein gutes Modell für deren Struktur. Und so sah das Ergebnis der Planungen aus:

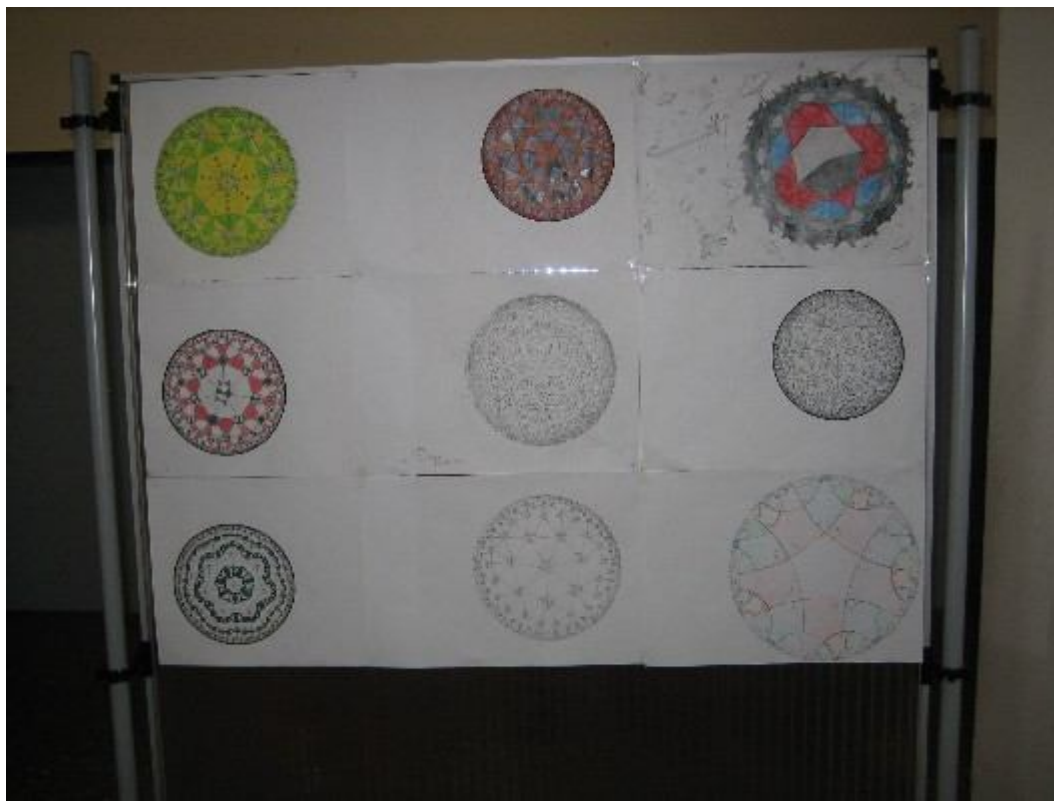




Station1: Die Geometrie der Sphäre



Station 2: Die Geometrie der hyperbolischen Ebene



Station 3: Parkettierungen

Korallenriffe

Allgemein

- ca. 1% der Erdoberfläche (283.200 km²)
- 700 entdeckte Arten
- Sie gehören zu Nesseltieren.

In der Mitte ist ein Schlund (zur Ausscheidung und Nahrungsaufnahme).
Darum ist ein Ring mit Tentakeln.

- Nahrungsaufnahme findet nachts statt
- Körper fast nur für Verdauung
- das bekannteste Riff: Great Barrier Reef (2000 km lang, 300.000 km², 400 verschiedene Korallen)




Fortpflanzung

- Korallen sind Zwitter
- einmal im Jahr Ei- und Samenzellenausstoß
- Befruchtung
 - ↳ Larven
 - ↳ auf der Wasseroberfläche (rosa Teppich)
 - ↳ Absätze auf dem Meeresgrund
- Wenn sie nicht von Fressfeinden getötet werden, entsteht eine neue Kolonie.

Bedrohung

- Menschen: Fischerei, Hotels, Abwasser etc.
- Außerdem werden sie überdüngt, durch Pestizide vergiftet und sie können im Schlack ersticken.
- Industrie (Abwasser mit Schwermetallen, Öle & Gase)

⇒ weniger Fortpflanzung
niedrigere Lebenserwartung
Artenvielfalt NICHT ab




Station 4: Biologische Erläuterungen zum Korallenriff





Station 4: Das Korallenriff von links nach rechts

Obwohl der Vortrag ohne Generalprobe über die Bühne ging, ist es uns mit vereinten Kräften beider Nationen gut gelungen. Einige Lehrer waren gaben sogar spontan zu, dass sie alles gut verstanden hätten. Und das bezog sich sicher nicht nur auf die bemerkenswerten sprachlichen Fähigkeiten unserer Gäste, sondern auch auf den teilweise doch sehr abstrakten Inhalt. Wenn man so etwas Verrücktes wie hyperbolische Flächen so konkret erfahrbar machen kann, dann sollte doch kein Thema zu schwierig sein, um an der Schule vermittelt zu werden. Sicherlich muss man dabei zugeben, dass wir Geometrie als pure Geometrie betrieben haben und die Analysis dabei noch außen vor gelassen haben. Wer da weiterstudieren möchte, kann ja mal die Links in der Planung durchstöbern.

Auch wenn es vielleicht etwas untergegangen ist: Der Bezug zur Umwelt und der Appell, die vom Klimawandel bedrohte wunderbare Welt der Korallenriffe zu schützen, hat viel zur Motivation beigetragen. Dies könnte am besten dadurch einen bleibenden Ausdruck finden, dass das gehäkelte Korallenriff in einem Schaukasten noch etwas naturgetreuer arrangiert wird. Wer dabei Lust hat mitzumachen, soll sich melden!

Noch schöner wäre es, wenn das Projekt in Vlotho nur seinen Anfangs- und nicht schon seinen Endpunkt erreicht hätte, nachdem es so spektakulär in Amerika und in Lettland gelaufen ist. Wir laden alle potentiellen Nachahmerschulen herzlich ein, sich mit uns in Verbindung zu setzen. Es gibt jetzt genügend Expertinnen in unseren Reihen!